risulta subito l'equivalenza del problema della quadratura del cerchio con quello della sua rettificazione, perchè si può passare dall'uno altro mediante una costruzione di una terza o di una media proporzionale; cioè mediante costruzioni eseguibili per mezzo di rette e di cerchi e riportate da EUCLIDE nel libro VI dei suoi Στοιχεῖα (prop. 11 e 13).

Beninteso, qui si intende parlare di una costruzione *esatta dal punto di vista teorico;* perchè di costruzioni approssimate ma più che sufficienti per i bisogni pratici, cioè per i cerchi materiali, non è difficile escogitarne ed alcune di esse erano già note molti secoli prima di ARCHIMEDE; invero, per esempio nel papiro Rhind, dovuto al calcolatore egizio AHMES che rimonta ad un'epoca imprecisata fra il 1700 ed il 2000 a. C., come valore approssimato dell'area del cerchio si prende quello fornito dai sessantaquattro ottantaunesimi del quadrato del diametro [1], con una esattezza più che sufficiente per i bisogni pratici ordinari.

Se si abbandona poi la restrizione di fare uso solo di rette e di cerchi, non è difficile trovare delle costruzioni esatte dal punto di vista teorico di un quadrato avente area eguale a quella d'un cerchio assegnato; costruzioni siffatte vennero già escogitate dagli antichi greci. Così DINOSTRATO, matematico greco del 4° sec. a. C., ha fatto uso a tale uopo di una linea speciale detta appunto « quadratrice » (e già usata da HIPPIA di Elide — 420 a. C. circa — per la trisezione dell'angolo). Ed allo stesso risultato si può giungere facendo uso della « cicloide », della « sinusoide », della « tangentoide », ecc., ecc. [2].

Poichè in geometria analitica cartesiana una retta è rappresentata da un'equazione di primo grado ed un cerchio da una particolare equazione di secondo grado, se si assume come unità di misura della lunghezza il raggio del nostro cerchio, al problema della quadratura del cerchio potremo dare la seguente forma:

« Vedere se il numero $\pi$ è un numero razionale », cioè è

---

[1] Nel mio *Calcolo numerico* (Zanichelli, Bologna, 1929), p. 310, trovasi riportato in *fac simile* il passo di AHMES. Nelle citazioni seguenti questo mio libro sarà ricordato semplicemente con *Calc. num.*

[2] Cfr. fine della seconda parte di questo articolo.



della forma $p/q$, ove $p$ e $q$ sono interi positivi; o, se è irrazionale, vedere se $\pi$ è esprimibile mediante un numero finito di radicali quadratici e di operazioni razionali, cioè « vedere se $\pi$ è radice di un'equazione di secondo grado a coefficienti razionali »; o, più in generale, « vedere se $\pi$ è radice d'una equazione algebrica di grado $n$ a coefficenti razionali e risolubile per radicali quadratici ».

Per molti secoli questi quesiti rimasero senza risposta. Finalmente, nel 1768, J. H. LAMBERT ha dato la prima dimostrazione dell'irrazionalità di $\pi$; e più di un secolo dopo, nel 1882, F. LINDEMANN ha dimostrato che $\pi$ non può essere radice di nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali e quindi, a maggior ragione, non può essere radice di nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali risolubile per radicali quadratici. Cosicchè in tale anno, 1882, si potè finalmente scrivere la parola « fine » sotto al bimillenario problema della quadratura del cerchio: il problema proposto era impossibile; cioè si era giunti a dimostrare che « era *impossibile* costruire un quadrato di area eguale a quella d'un cerchio assegnato mediante una costruzione in cui si facesse uso *solo di rette e di cerchi* ».

**2. Calcolo di $\pi$.** — ARCHIMEDE è il primo, come ho già detto, che usi esplicitamente il numero $\pi$ e che istituisca un primo calcolo di esso. Il risultato di ARCHIMEDE può esprimersi così:

$$3 + 1/7 > \pi > 3 + 10/71 \qquad \text{(Κύκλου μέτρησις, prop. 3).}$$

ARCHIMEDE giunge al risultato rappresentato da questa limitazione calcolando successivamente i lati dei poligoni regolari di 6, 12, 24, 48, 96 lati inscritti e circoscritti al cerchio assegnato; per il che occorrevano delle estrazioni successive di radici quadrate [1] e dei calcoli abbastanza lunghi e penosi, specie con il sistema greco di numerazione.

Senza occuparmi degli altri valori usati implicitamente per $\pi$ dai matematici indiani ed arabi, vengo a parlare di LUDOLPH van CEULEN, di Leida, che nel 1615 riprendeva il cal-

---

[1] v. *Calc. num.*, p. 305.

# Numeri algebrici e trascendenti ed il problema della quadratura del cerchio [1]

## PARTE PRIMA

**1. Il problema della quadratura del cerchio.** — Il problema della quadratura del cerchio è famosissimo, sì che non vi è persona che non ne abbia sentito parlare; ed anche DANTE accenna ad esso proprio alla fine del suo divino poema, quando imagina di giungere alla suprema beatitudine, cioè alla contemplazione della divina Trinità:

*Qual' è il geometra che tutto s' affige*
*Per misurar lo cerchio e non ritrova,*
*Pensando, quel principio ond' egli indige;*
*Tale era io a quella vista nova, ....*

(Paradiso, *Canto* XXXIII, *versi* 133-136).

Cosicchè al tempo di DANTE, cioè circa 15 secoli dopo la posizione del problema della quadratura del circolo, il geometra era ancora nell' « indigenza », cioè nella mancanza del principio atto a permettergli di risolvere il problema stesso; e dovevano ancora passare vari secoli prima di giungere a ritrovare i principii desiderati e ad applicarli alla risoluzione definitiva del problema. Invero il problema della quadratura del cerchio potè dirsi completamente esaurito soltanto nel 1882, cioè oltre duemila anni dopo la sua formulazione.

Che esistano un segmento di lunghezza eguale alla periferia ed un quadrato di area eguale a quella di un cerchio

(1) Da due conferenze tenute al *Seminario Matematico e fisico* di Milano, nel maggio 1929.



assegnato, erano cose ben note anche ai geometri dell' antica Grecia: EUCLIDE alessandrino del 4° sec. a. C., ed ARCHIMEDE siracusano del 3° sec. a. C. Ed invero EUCLIDE, nei suoi immortali Στοιχεῖα od *Elementi* scrive (libro XII, prop. 2): Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα cioè: « Due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri », da cui si deduce la costanza del rapporto fra l' area del cerchio e l' area del quadrato del diametro; ed ARCHIMEDE nel suo celeberrimo opuscolo Κύκλου μέτρησις = *Misura del cerchio* calcola, per la prima volta, la lunghezza e l' area del cerchio. Precisamente ARCHIMEDE rileva che è costante il rapporto fra la lunghezza del cerchio e quella del diametro relativo; per modo che, indicato con $\pi$ questo rapporto costante (ove $\pi$ è la iniziale della parola greca περιφέρεια = *contorno*) si ha:

*lunghezza del cerchio* $= \pi \times$ *diametro,*

ed inoltre dimostra per primo che:

*area del cerchio = area dèl triangolo rettangolo che ha come cateti la lunghezza del cerchio ed il semidiametro* (1);

il che esprimiamo noi attualmente con le formule:

$$L = 2\pi r \quad \text{ed} \quad a^2 = Lr/2 = \pi r^2, \tag{1}$$

ove $r$ = raggio o semidiametro, $L$ = lunghezza del cerchio ed $a$ = lato del quadrato di area eguale a quella del cerchio.

Con ARCHIMEDE è dunque esaurito il problema di calcolare la lunghezza e l' area d' un cerchio assegnato, ma invece ha inizio o, meglio, continua più che mai a porsi il ***problema della quadratura del cerchio***; problema che sotto forma precisa si enuncia così:

« Costruire, *facendo uso soltanto di rette e di cerchi*, un quadrato di area eguale a quella d' un cerchio assegnato ».

Analogamente si enuncia il *problema della rettificazione del cerchio*, che consiste nel costruire, facendo uso soltanto di rette e cerchi, un segmento di lunghezza eguale alla periferia d' un cerchio assegnato. Ma, dalle formule (1) di ARCHIMEDE,

(1) Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. (Κύκλου μετ., Prop. 1).